

Chaos und Fraktale

PETER RAITH

Zusammenfassung. Mit Hilfe von Beispielen wird versucht eine Einführung zu Chaos und Fraktalen zu geben. Die wichtigsten dieser hier behandelten Beispiele sind das logistische Wachstum in der Populationsdynamik und das Newtonverfahren für $z^3 - 1$. Als ein wichtiges Konzept in der Theorie der Fraktale wird die Hausdorffdimension vorgestellt.

Einleitung

Unter einem chaotischen System versteht man ein solches, das zwar deterministisch ist (also man theoretisch den Zustand zu jeder Zeit exakt angeben kann, wenn man den Anfangszustand exakt kennt), das sich aber in der Praxis eher wie ein Wahrscheinlichkeitstheoretisches System verhält. In der Praxis ist es nämlich kaum möglich den Anfangszustand wirklich ganz exakt zu kennen. Chaotische Systeme haben die Eigenschaft, dass kleine Änderungen des Anfangszustands nach einiger Zeit große Auswirkungen haben. Bekannte Beispiele dafür sind das Wetter, die Wirtschaft oder das Würfeln (prinzipiell könnte man ja beim Würfeln wegen der Newton'schen Gesetze der Mechanik exakt berechnen wie der Würfel fällt). Im Zusammenhang mit dem Wetter wird das Phänomen des chaotischen Verhaltens oft mit dem viel zitierten „die sanften Luftbewegungen eines über eine Wiese auf der Wiener Donauinsel fliegenden Schmetterlings lösen einige Wochen später einen Wirbelsturm über dem Golf von Mexiko aus“ erklärt.

Grob gesagt sind Fraktale Mengen, die eine gewisse Selbstähnlichkeit haben. Es zeigt sich, dass bei chaotischem Verhalten oft auch Fraktale auftreten.

Wir versuchen hier einige Aspekte von Chaos und Fraktalen anhand einiger Beispiele zu erklären. Es werden aber keine exakten Definitionen von Chaos und Fraktalen gegeben, denn auch in der Literatur gibt es verschiedene nicht äquivalente Definitionen dazu. Viel mehr soll versucht werden zu verstehen, wie es zu diesen Phänomenen kommt, und eine intuitive Vorstellung dazu zu entwickeln. Weil Begründungen oft weit über den hier gesetzten Rahmen hinausgehen, wird oft nur gesagt, dass ein System diese oder jene Eigenschaft hat, ohne dies genauer zu begründen.

Zunächst wird ein Beispiel zur Populationsdynamik behandelt. Dabei wird dargestellt, wie dabei chaotisches Verhalten auftritt. Anschließend wird das Newtonverfahren für $z^3 - 1$ besprochen. Auch hier tritt chaotisches Verhalten auf. Weiters

tritt dabei auch ein Fraktal, nämlich die Juliamenge, auf. Bei einem weiteren Beispiel treten ebenfalls chaotisches Verhalten und Fraktale auf. Schließlich wird ein Konzept im mathematischen Umgang mit Fraktalen herausgegriffen und genauer behandelt. Dieses Konzept ist die Hausdorffdimension, die ein Maß dafür ist, wie „groß“ oder „dick“ eine Menge ist. Dabei wird diese zuerst einmal definiert, dann wird versucht eine Vorstellung dafür zu erarbeiten. Dann wird noch ein Beispiel gebracht, bei dem sich die Zustände „nach langer Zeit“ in der Nähe eines Fraktals befinden, und man auf dem Fraktal chaotisches Verhalten hat.

1. Ein Modell zum Bevölkerungswachstum

Um das Bevölkerungswachstum zu beschreiben, wählen wir ein diskretes Modell. Damit wird beschrieben, wie sich die Bevölkerung von einer Generation in die nächste entwickelt (oder etwa von einem Jahr ins nächste Jahr). Die Zeit wird als diskrete Variable betrachtet, sie nimmt Werte in \mathbb{N}_0 an. Selbstverständlich gibt es auch kontinuierliche Modelle, bei denen die Zeit reelle Werte (oder nichtnegative reelle Werte) annehmen kann. Hier werden wir diese kontinuierlichen Modelle (sie führen zu Differenzialgleichungen) nicht betrachten. Bezeichnen wir die Bevölkerungsanzahl zum Zeitpunkt n mit x_n . Dabei nehmen wir an, dass $x_n \in \mathbb{R}$ ist. Das ist natürlich eine idealisierende Annahme, denn in Wirklichkeit müsste $x_n \in \mathbb{N}_0$ gelten, weil es sich ja um eine Anzahl handelt. Es ist also x_0 die Bevölkerungsanzahl zur Zeit 0 (die Ausgangs- oder Anfangspopulation), x_1 die Bevölkerungsanzahl zur Zeit 1, x_2 die Bevölkerungsanzahl zur Zeit 2, \dots . Die Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ beschreibt dann die Bevölkerungsentwicklung. Diese Entwicklung wird vom Startwert x_0 abhängen.

Als einfachstes Modell für ein Bevölkerungswachstum könnte man annehmen, dass der Bevölkerungszuwachs proportional zur vorhandenen Bevölkerungszahl ist. Es wäre also $x_{n+1} - x_n = \gamma x_n$. Daraus erhält man $x_{n+1} = (1 + \gamma)x_n$ und durch Induktion lässt sich leicht beweisen, dass $x_n = (1 + \gamma)^n x_0$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt. Wenn also $\gamma > 0$ ist (das heißt die Geburtenrate ist größer als die Sterberate), und $x_0 > 0$ ist (was natürlich eine vernünftige Annahme ist), dann wäre $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = +\infty$. In diesem Fall erhielten wir eine Bevölkerungsexplosion, was wegen der begrenzten Ressourcen klarerweise unrealistisch ist.

Bevor wir ein realistischeres Modell vorstellen, beschreiben wir allgemein, wie man analog zum obigen Beispiel von einer Differenzengleichung zu einem diskreten dynamischen System kommt. Wir haben eine Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ und betrachten die *Differenzengleichung*

$$(1) \quad x_{n+1} - x_n = f(x_n) .$$

Definiert man $T(x) := x + f(x)$, dann erhält man für jedes $x \in \mathbb{R}$, dass die Lösung $(x_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ von (1) mit $x_0 = x$ die Eigenschaft

$$(2) \quad x_n = T^n(x) \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}_0$$

hat, wobei $T^0(x) := x$ für alle $x \in \mathbb{R}$ und $T^n := T \circ T^{n-1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ ist. Damit haben wir gesehen, dass das Lösen von Differenzgleichungen stets zum Iterieren einer Funktion führt. Anstatt der Differenzgleichung geben wir ab jetzt stets bereits die zu iterierende Funktion T an. Im obigen Beispiel wäre $T(x) = (1 + \gamma)x$.

Um das obige Modell zu verbessern, treffen wir zusätzliche Annahmen. Wir nehmen eine „Maximalbevölkerung“ M an, und wir bezeichnen die Bevölkerungsanzahl mit y . Dann nehmen wir an, dass wegen des Kampfes um die begrenzten Ressourcen nur wenige Individuen überleben, falls die Bevölkerungszahl nahe bei M ist. Ein Modell, das diese Vorgaben erfüllt, wäre

$$(3) \quad y_{n+1} = S(y_n) \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}_0, \text{ wobei } S(y) := \alpha y(M - y)$$

für ein passendes $\alpha \geq 0$. Dabei ist es natürlich sinnvoll anzunehmen, dass $y_0 \in [0, M]$ ist und dass $S(y) \in [0, M]$ für jedes $y \in [0, M]$ gilt. Um letzteres zu gewährleisten, bestimmt man das Maximum von S . Man sieht, dass dieses bei $\frac{M}{2}$ liegt und den Wert $\alpha \frac{M^2}{4}$ annimmt. Deshalb setzen wir $\alpha \in [0, \frac{4}{M}]$ voraus. Dieses Populationsmodell nennt man das *logistische Wachstum*. Wir wollen dieses Modell mathematisch vereinfachen. Dazu setzen wir $x := \frac{y}{M}$. Die Variable x beschreibt also nicht die absolute Bevölkerungsanzahl, sondern den relativen Anteil der Bevölkerungsanzahl an der „Maximalbevölkerung“ M . Es ist also stets $x \in [0, 1]$. Entsprechend dazu soll T die Zeitentwicklung dieses relativen Anteils beschreiben. Das bedeutet, dass

$$T(x) = \frac{S(Mx)}{M} = \frac{1}{M} (\alpha Mx(M - Mx)) = M\alpha x(1 - x)$$

gilt. Setzt man jetzt $a := M\alpha$, dann erhält man $a \in [0, 4]$ und

$$(4) \quad T(x) = ax(1 - x),$$

wobei $T : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$. Anstatt mit der von der Herleitung her sinnvollerer Funktion S in (3) arbeiten wir mit der mathematisch bequemerer Funktion T aus (4). Die absoluten Zahlen können dann einfach durch Multiplikation mit M erhalten werden.

Jetzt werden wir dynamische Systeme definieren. Diese sind Verallgemeinerungen von obigen Populationsmodellen. Der dabei auftretende Begriff „*kompakter metrischer Raum*“ ist eine Verallgemeinerung des Begriffs „abgeschlossenes Intervall“. Zunächst benötigen wir nur, dass abgeschlossene Intervalle und Intervalle der Form $[a, +\infty]$ kompakt sind, später benötigen wir auch, dass $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ und „abgeschlossene Quadrate“ (also solche, bei denen der „Rand“ dazugehört) kompakt sind.

Definition 1. Sei X ein kompakter metrischer Raum und $T : X \rightarrow X$ eine stetige Abbildung. Dann heißt (X, T) ein *diskretes topologisches dynamisches System*.

Wir werden hier stets kurz „dynamisches System“ sagen, und die Zusätze „diskret“ und „topologisch“ weglassen. Falls wir den Grundraum X als bekannt voraussetzen, sagen wir auch kurz „das dynamische System T “. Für das logistische

Wachstum wäre $X = [0, 1]$ und T die in (4) beschriebene Funktion. Im Fall des am Anfang dieses Kapitels behandelte Populationsmodells wäre $X := [0, +\infty]$ (Achtung, $X := [0, +\infty)$ wäre nicht kompakt!) und $T(x) := (1 + \gamma)x$ für $x < +\infty$ und $T(+\infty) := +\infty$.

Definition 2. Es sei (X, T) ein diskretes topologisches dynamisches System, und sei $x \in X$. Dann heißt die Folge $(T^n(x))_{n \in \mathbb{N}_0}$ der *Orbit* von x .

Der Orbit von x beschreibt somit die Zeitentwicklung der Zustände, wenn man im Zustand x startet.

Definition 3. Sei (X, T) ein diskretes topologisches dynamisches System, und sei $x \in X$. Die Menge der Häufungspunkte von $(T^n(x))_{n \in \mathbb{N}_0}$ heißt der ω -Limes von x , und wird mit $\omega(x)$ bezeichnet. Es gilt also

$$\omega(x) := \left\{ y \in X : \exists (n_k)_{k \in \mathbb{N}} \text{ streng monoton wachsend mit } \lim_{k \rightarrow +\infty} T^{n_k} x = y \right\}.$$

Man kann sich den ω -Limes von x als die Menge der Zustände vorstellen, in deren Nähe man sich „nach langer Zeit“ befindet, wenn man in x gestartet ist.

Kehren wir jetzt wieder zu unserem in (4) beschriebenen logistischen Wachstum zurück. Dieses hängt noch von dem Parameter a ab, und wir wollen das Verhalten des Systems in Abhängigkeit von diesem Parameter beschreiben. Dabei gehen wir nicht auf die Beweise ein.

Für $a \in [0, 1]$ gilt $\lim_{n \rightarrow +\infty} T^n x = 0$ für alle $x \in [0, 1]$. Das bedeutet, dass $\omega(x) = \{0\}$ für jedes $x \in [0, 1]$. Unsere Population stirbt also irgendwann einmal aus, egal wie groß die Anfangspopulation war. Dieser Parameterbereich ist daher biologisch nicht sehr interessant.

Im Fall $a \in (1, 4]$ kann man leicht nachrechnen, dass $1 - \frac{1}{a} \in (0, 1)$ ein Fixpunkt ist, also

$$T\left(1 - \frac{1}{a}\right) = 1 - \frac{1}{a}$$

gilt. Für den Startwert $1 - \frac{1}{a}$ ist der Orbit daher die konstante Folge, und somit ist $\omega\left(1 - \frac{1}{a}\right) = \left\{1 - \frac{1}{a}\right\}$. Zumindest bei diesem Startwert überlebt unsere Population. Das macht diesen Parameterbereich auch biologisch interessanter. Es gilt jedoch auch stets $T(1) = T(0) = 0$, und deshalb $\omega(0) = \omega(1) = \{0\}$.

Falls $a \in (1, 3]$ ist, dann gilt $\omega(x) = \left\{1 - \frac{1}{a}\right\}$ für alle $x \in (0, 1)$. Es stellt sich also für jede Anfangspopulation (ausgenommen, diese ist 0 oder die „Maximalbevölkerung“) nach „langer Zeit“ eine stabile Bevölkerungszahl ein, die sich nicht mehr ändert. An dieser Stelle wollen wir bemerken, dass das entsprechende kontinuierliche Modell stets nach „langer Zeit“ eine stabile Bevölkerungszahl voraussagt. Für den Fall $a = \frac{5}{2}$ ist der Graph von T in Abbildung 1 dargestellt. Es ist angedeutet, wie der Orbit von $\frac{1}{4}$ gegen den Fixpunkt $\frac{3}{5}$ konvergiert. Wenn a etwas größer als 3 wird, dann tritt ein neuer Effekt ein. Der Fixpunkt $1 - \frac{1}{a}$ wird instabil, also für x nahe bei (aber ungleich) $1 - \frac{1}{a}$ ist $\omega(x) \neq \left\{1 - \frac{1}{a}\right\}$. Aber es entsteht ein stabiler Orbit der Periode 2, das bedeutet es gibt $b_1 \neq b_2 \in (0, 1)$

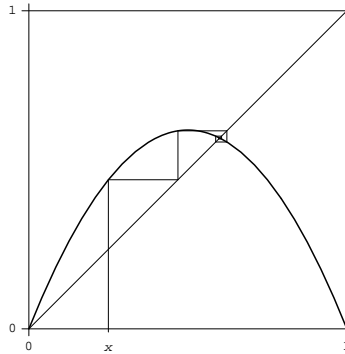


Abbildung 1: Der Graph der Abbildung $T(x) := \frac{5}{2}x(1-x)$.

mit $T(b_1) = b_2$ und $T(b_2) = b_1$ (also $T^2(b_1) = b_1$), und für alle x , die genügend nahe bei b_1 oder b_2 liegen, gilt $\omega(x) = \{b_1, b_2\}$. Ein konkretes Beispiel dazu wäre $a = \frac{2}{3}(1 + \sqrt{13}) \approx 3.070367517$. Dann ist $T(\frac{3}{4}) = \frac{1}{8}(1 + \sqrt{13}) \approx 0.5756939094$ und $T(\frac{1}{8}(1 + \sqrt{13})) = \frac{3}{4}$. Der Graph dieser Transformation ist in Abbildung 2 dargestellt, wobei $p = \frac{1}{8}(1 + \sqrt{13}) \in \{b_1, b_2\}$ ist. In der linken Abbildung ist der Orbit von $\frac{5}{18}$ angedeutet, in der rechten der Orbit von $\frac{4}{5}$.

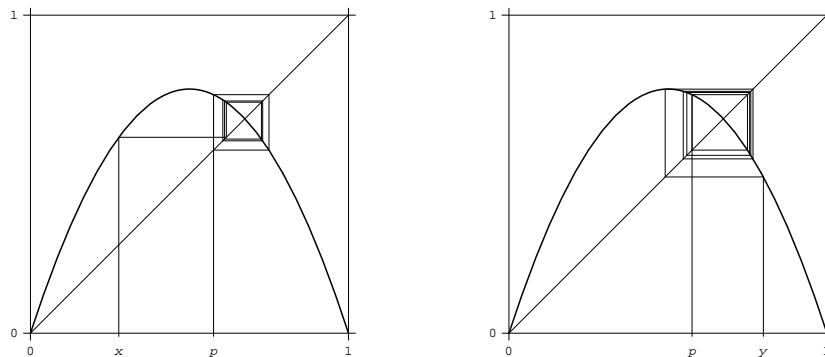


Abbildung 2: Der Graph der Abbildung $T(x) := \frac{2}{3}(1 + \sqrt{13})x(1-x)$.

Macht man a noch größer, dann wird auch der Orbit der Periode 2 instabil und es entsteht ein stabiler Orbit der Periode 4. Bei wachsendem a wird auch dieser instabil und es entsteht ein stabiler Orbit der Periode 8. Auf diese Weise geht es weiter bis es schließlich bei einem gewissen Wert für a Punkte der Periode 2^n für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ gibt. Bei noch größeren Werten für a tritt dann „chaotisches Verhalten“ ein. Es gibt dann zum Beispiel eine überabzählbare Teilmenge $A \subseteq [0, 1]$ und ein $\varepsilon_0 > 0$, sodass es für jedes $x \in A$ und jedes $\delta > 0$ ein $y \in A$ und ein $n \in \mathbb{N}$ gibt mit $|y - x| < \delta$ und $|T^n(y) - T^n(x)| > \varepsilon_0$. Schließlich kann man bei $a = 4$ von „totalem Chaos“ sprechen. Es gelten zum Beispiel folgende drei Eigenschaften. Erstens gibt es ein $x \in [0, 1]$ mit

$\omega(x) = [0, 1]$. Zweitens liegen die periodischen Punkte dicht, also für jedes $x \in [0, 1]$ und jedes $\delta > 0$ gibt es ein $y \in [0, 1]$ und ein $n \in \mathbb{N}$ mit $|y - x| < \delta$ und $T^n y = y$. Drittens gilt die *starke Abhängigkeit von den Anfangsbedingungen*, das heißt es gibt ein $\varepsilon_0 > 0$, sodass es für jedes $x \in [0, 1]$ und jedes $\delta > 0$ ein $y \in [0, 1]$ und ein $n \in \mathbb{N}$ gibt mit $|y - x| < \delta$ und $|T^n(y) - T^n(x)| > \varepsilon_0$.

An dieser Stelle sei ausdrücklich darauf hingewiesen, dass wir hier keine exakte Definition von Chaos geben werden. Wie bereits in der Einleitung erwähnt gibt es auch in der Literatur verschiedene Definitionen von Chaos, und diese Definitionen sind nicht zueinander äquivalent. Die oben im Fall $a = 4$ beim logistischen Wachstum angesprochenen drei Eigenschaften entsprechen der Definition von *Chaos nach Devaney* (siehe [1]).

Die starke Abhängigkeit von den Anfangsbedingungen entspricht recht gut der anschaulichen Vorstellung von Chaos, nämlich dass kleine Änderungen am Anfang nach einiger Zeit große Auswirkungen haben. Andere Definitionen von Chaos findet man zum Beispiel in [4] und [6]. Die topologische Entropie (siehe etwa [8]) kann man als ein Maß dafür auffassen, wie chaotisch ein dynamisches System ist.

2. Das Newtonverfahren für $z^3 - 1$

Das Newtonverfahren dient dazu die Nullstellen einer Funktion f zu bestimmen (siehe etwa [7]). Wir gehen hier nicht auf die Motivation und die exakten Sätze über das Newtonverfahren ein, sondern beschreiben nur kurz dieses Verfahren. Es sei f eine zweimal stetig differenzierbare Funktion (es würde sogar genügen nur stetig differenzierbar vorauszusetzen). Dann definieren wir die Abbildung T durch

$$(5) \quad T(x) := x - \frac{f(x)}{f'(x)}.$$

Jetzt wählt man einen Startwert x und betrachtet den Orbit von x unter T , also die Folge $(T^n(x))_{n \in \mathbb{N}_0}$. Falls x genügend nahe einer Nullstelle a von f gewählt wird und $f'(a) \neq 0$ ist, dann gilt $\lim_{n \rightarrow +\infty} T^n(x) = a$ (also $\omega(x) = \{a\}$), weil $|T'(a)| = 0 < 1$. Das Newtonverfahren konvergiert sogar sehr schnell zu dieser Nullstelle, es ist also gut geeignet, um Näherungswerte für diese Nullstelle zu bestimmen.

Wir interessieren uns jetzt für das Newtonverfahren als ein dynamisches System. Den Startwert x interpretieren wir als Zustand zur Zeit 0, $T(x)$ als Zustand zur Zeit 1, und allgemein die n -te Näherung $T^n(x)$ als Zustand zur Zeit n . Zwar wissen wir, dass für x genügend nahe bei einer Nullstelle a das Newtonverfahren $\omega(x) = \{a\}$ ergibt, aber nicht für jeden Startwert x muss das Newtonverfahren konvergieren (und tut es normalerweise auch nicht). Um die Dynamik des Newtonverfahrens zu beschreiben, beschränken wir uns auf ein einfaches Beispiel (bei dem für die Bestimmung der Nullstellen das Newtonverfahren nicht notwendig wäre). Dazu betrachten wir $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$. Weiters betrachten wir dann die Abbildung T auf $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ ($\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ ist die Riemann'sche Zahlenkugel). Weil $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ kompakt ist, und

die in (5) definierte Abbildung stetig sein wird, erhalten wir damit ein dynamisches System nach Definition 1.

Unsere Funktion ist $f(z) := z^3 - 1$. Nach (5) ergibt sich daher, dass

$$(6) \quad T(z) = \frac{2}{3}z + \frac{1}{3z^2}$$

gilt, wobei $T(0) := \infty$ und $T(\infty) := \infty$ definiert werden. Diese Funktion f hat die drei Nullstellen 1 , $e^{\frac{2\pi i}{3}}$ und $e^{\frac{4\pi i}{3}}$. Startet man genügend nahe bei den Nullstellen, dann konvergiert das Newtonverfahren gegen die entsprechende Nullstelle.

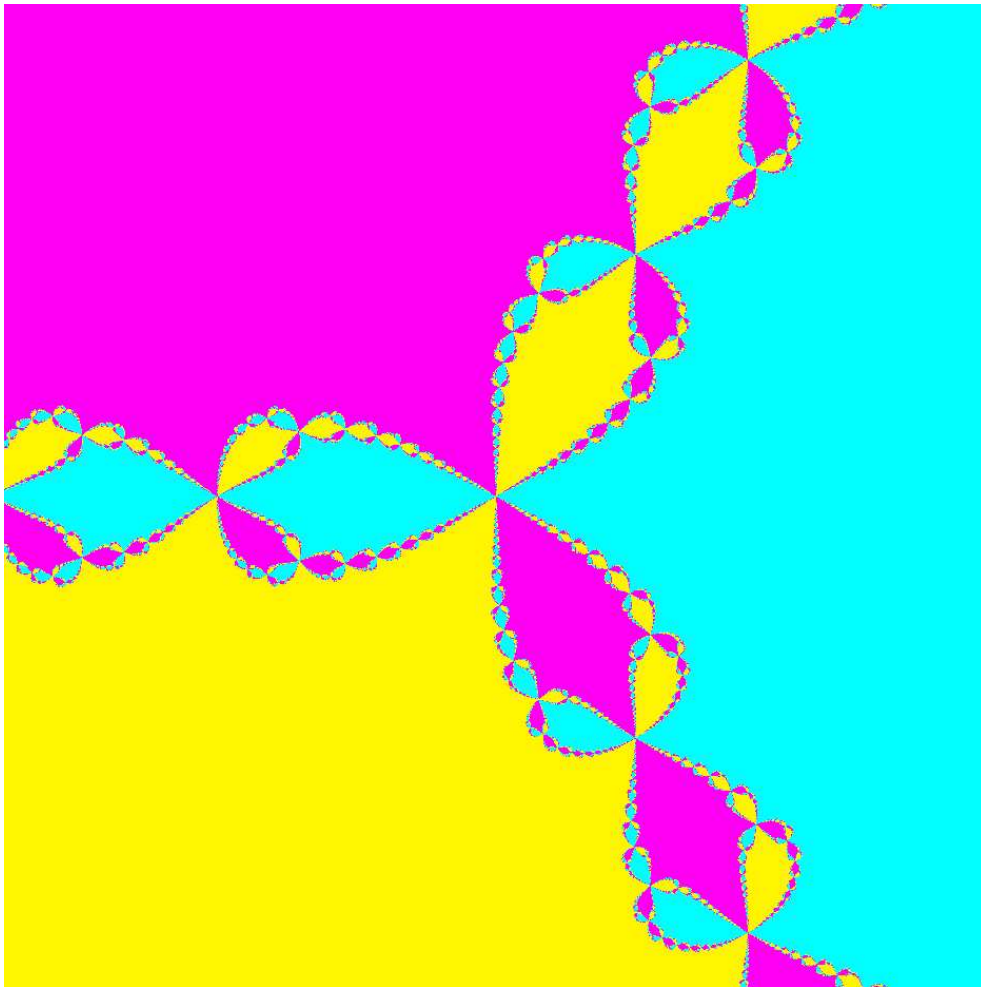


Abbildung 3: Das Newtonverfahren für $z^3 - 1$.

Das globale Verhalten des Newtonverfahrens ist in Abbildung 3 dargestellt. Falls man im blauen Bereich startet, dann gilt $\omega(z) = \{1\}$, beim Start im rosa Bereich gilt $\omega(z) = \{e^{\frac{2\pi i}{3}}\}$, und beim Start im gelben Bereich gilt $\omega(z) = \{e^{\frac{4\pi i}{3}}\}$. Für jede dieser Nullstellen a ist es relativ leicht zu zeigen, dass $\{z \in \mathbb{C} : \omega(z) = \{a\}\}$

(der *Attraktionsbereich* von a) offen ist. Nachdem die verschiedenen Attraktionsbereiche offensichtlich paarweise disjunkt sein müssen, kann ihre Vereinigung nicht ganz $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ sein, weil $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ zusammenhängend ist. Es gibt also eine nichtleere Menge $J \subseteq \mathbb{C} \cup \{\infty\}$, sodass für $z \in J$ die Menge $\omega(z)$ nicht nur aus einem der Punkte aus $\{1, e^{\frac{2\pi i}{3}}, e^{\frac{4\pi i}{3}}\}$ besteht.

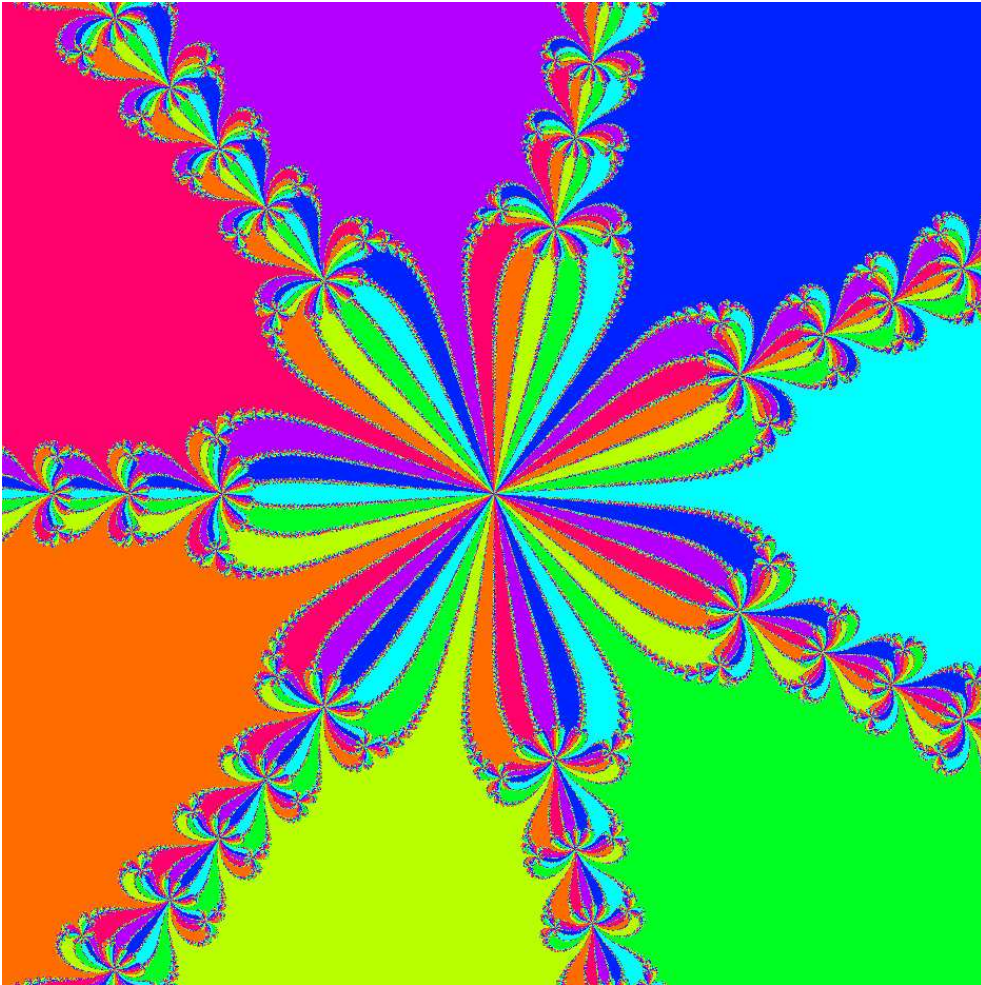


Abbildung 4: Das Newtonverfahren für $z^7 - 1$.

In Abbildung 3 ist J die Vereinigung der Ränder der drei Attraktionsbereiche (in diesem Fall stimmt J mit dem Rand jedes einzelnen der drei Attraktionsbereiche überein). Es handelt sich also um eine ziemlich komplizierte Menge. Man kann aber erkennen, dass „sich diese Menge selbst ähnlich ist“, das bedeutet, wenn man einer Stelle „näher hinzoomt“ sieht man strukturell das selbe Bild wie „ohne Hinzoomen“, und zwar egal „wie nahe man hinzoomt“. Mengen mit dieser Eigenschaft der Selbstähnlichkeit nennt man *Fraktale*. Auch hier ist dazuzusagen, dass es in der Literatur verschiedene Definitionen von Fraktalen gibt, und diese nicht zueinander

äquivalent sind. Wir geben hier auch keine exakte Definition von Fraktalen, werden aber später eine der Möglichkeiten einer Definition erwähnen.

Man nennt die Menge J die *Juliamenge* des Newtonverfahrens für $z^3 - 1$ (nach dem französischen Mathematiker Gaston Julia), ihr Komplement (also die Menge der Startwerte, für die das Newtonverfahren gegen eine Nullstelle konvergiert) die *Fatoumenge* (nach dem französischen Mathematiker Pierre Fatou). Julia und Fatou haben unabhängig voneinander im Jahr 1918 das globale Verhalten von rationalen Funktionen beschrieben. Wichtig zu erwähnen ist, dass die Juliamenge überabzählbar viele Punkte besitzt. Auf der Juliamenge verhält sich das Newtonverfahren chaotisch. Man kann zum Beispiel beweisen, dass die Einschränkung von T auf J (also das dynamische System $(J, T|_J)$) Chaos nach Devaney (siehe Seite 6) zeigt.

Analog kann man auch Juliamengen für andere Abbildungen betrachten. In Abbildung 4 ist das globale Verhalten des Newtonverfahrens für $z^7 - 1$ dargestellt. Wegen (5) ergibt sich $Tz = \frac{6}{7}z + \frac{1}{7z^6}$. Wir erhalten ein ähnliches, aber noch komplizierteres Bild als beim Newtonverfahren für $z^3 - 1$.

Auch in der Natur kann man immer wieder Fraktale beobachten. Beispiele dafür sind Küstenlinien, Bergformationen, Farne und Schneeflocken. Für genauere Beschreibungen dieser Phänomene ist [5] sehr zu empfehlen, wo man auch viele schöne Bilder findet.

Chaos und Fraktale sind zwar voneinander unabhängig, treten aber trotzdem oft miteinander auf. Wir wollen jetzt ein weiteres Beispiel dazu geben. Dabei weichen wir von den in Definition 1 getroffenen Annahmen ab, indem wir eine unstetige Funktion T betrachten. Die Unstetigkeit vereinfacht unsere Betrachtungen erheblich. Ohne auf die Details genauer einzugehen erwähnen wir, dass es Möglichkeiten gibt, den Raum X und die Abbildung T so zu verändern, dass sich die dynamischen Eigenschaften nicht ändern, aber das geänderte System ein dynamisches System nach Definition 1 ist.

Wir definieren die Abbildung $T : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ durch

$$(7) \quad T(x) := \begin{cases} 3x, & \text{falls } x \in [0, \frac{1}{3}], \\ \frac{x}{2} + \frac{1}{4}, & \text{falls } x \in (\frac{1}{3}, \frac{2}{3}), \\ 3x - 2, & \text{falls } x \in [\frac{2}{3}, 1]. \end{cases}$$

Der Graph dieser Abbildung ist in Abbildung 5 dargestellt. Für $x \in (\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$ erhält man $\lim_{n \rightarrow +\infty} T^n(x) = \frac{1}{2}$. Jetzt definieren wir

$$J := \{x \in [0, 1] : \omega(x) \neq \{\frac{1}{2}\}\}$$

(man könnte das als die Juliamenge unserer Abbildung T bezeichnen). Zuerst einmal erwähnen wir, dass auch hier die Einschränkung von T auf J Chaos nach Devaney (siehe Seite 6) zeigt. Ebenso ist J ein Fraktal, in gewissem Sinn sogar das einfachste aller Fraktale. Im Folgenden wollen wir uns damit beschäftigen, wie diese Menge J aussieht.

Zunächst einmal wissen wir, dass $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$ sicher im Komplement von J liegt. Unser erster Schritt um J zu beschreiben ist also die Menge $J_1 = [0, 1] \setminus (\frac{1}{3}, \frac{2}{3}) = [0, \frac{1}{3}] \cup$

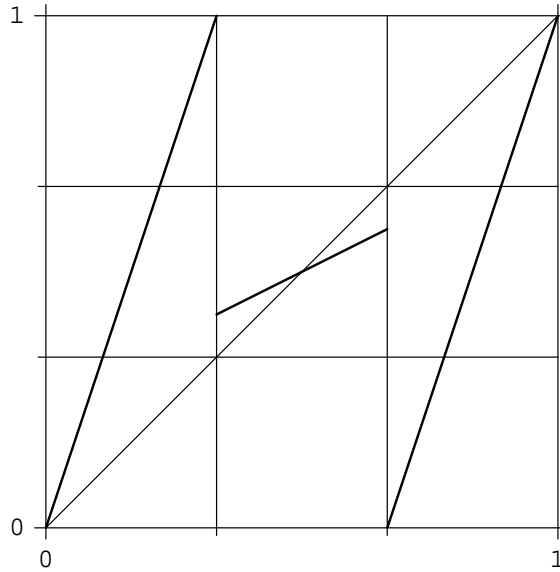


Abbildung 5: Der Graph der Abbildung aus (7).

$[\frac{2}{3}, 1]$. Für $x \in (\frac{1}{9}, \frac{2}{9})$ ist $T(x) \in (\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$, und deshalb ist $\lim_{n \rightarrow +\infty} T^n(x) = \frac{1}{2}$, also $x \notin J$. Ebenso ist $T(x) \in (\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$ für $x \in (\frac{7}{9}, \frac{8}{9})$, und somit $x \notin J$. Im zweiten Schritt wird also aus den zwei verbleibenden Intervallen, deren Vereinigung J_1 ergibt, jeweils das mittlere Drittel herausgeschnitten, und auf diese Weise J_2 erhalten. Daher ist J_2 eine Vereinigung von 4 abgeschlossenen Intervallen der Länge $\frac{1}{9}$. Es werden wieder aus diesen 4 Intervallen die mittleren Drittel herausgeschnitten, weil für x aus einem dieser mittleren Drittel gilt $T^2(x) \in (\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$ und deshalb $x \notin J$. Die Fortsetzung dieses Verfahren ergibt, dass J_n eine Vereinigung von 2^n abgeschlossenen Intervallen der Länge $\frac{1}{3^n}$ ist. Für ein x aus einem der mittleren Drittel eines dieser 2^n Intervalle gilt $T^n(x) \in (\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$, und somit gilt $x \notin J$. Wegen dieser Konstruktion ist $J \subseteq \bigcap_{n=1}^{\infty} J_n$. Andererseits wäre $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} J_n$ und $x \notin J$, dann gäbe es ein k , sodass $T^k(x) \in (\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$ (weil ja $\lim_{n \rightarrow +\infty} T^n(x) = \frac{1}{2}$). Wenn wir k minimal mit dieser Eigenschaft wählen, dann muss x im mittleren Drittel eines der 2^k Intervalle, deren Vereinigung J_k ergibt, liegen. Dann wäre aber $x \notin J_{k+1}$, was $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} J_n$ widerspricht. Daher ist $J = \bigcap_{n=1}^{\infty} J_n$.

Die auf obige Weise konstruierte Menge J ist genau die übliche Cantormenge (eine allgemeine Definition folgt gleich). Diese hat ebenfalls die Eigenschaft der Selbstähnlichkeit, ist also ein Fraktal. Weiters ist auch bekannt, dass die Cantormenge überabzählbar viele Elemente besitzt.

Allgemeiner startet man mit einem Intervall J_0 . Hat man J_n konstruiert, dann werden aus der Menge J_n endlich viele offene Intervalle herausgeschnitten, sodass J_{n+1} eine Vereinigung von endlich vielen nichttrivialen (das bedeutet, dass es aus mehr als einem Punkt besteht) abgeschlossenen Intervallen ist. Diese offenen Intervalle müssen aber nicht gleich groß sein. Das Maximum der Längen der disjunkten

abgeschlossenen Intervalle, deren Vereinigung J_n ergibt bezeichnen wir mit d_n . Falls $\lim_{n \rightarrow +\infty} d_n = 0$, dann nennt man $J := \bigcap_{n=1}^{\infty} J_n$ eine *Cantormenge*. Von der *üblichen Cantormenge* spricht man, wenn man mit $J_0 = [0, 1]$ startet, und in jedem Schritt aus jedem der disjunkten abgeschlossenen Intervalle, deren Vereinigung J_n ergibt, das mittlere Drittel herausschneidet.

3. Hausdorffdimension

Bei Fraktalen stellt sich die Frage, wie „groß“ sie sind. In unseren Beispielen waren sie stets relativ kleine Mengen. Es gibt verschiedene Möglichkeiten die „Größe“ von Fraktalen (oder allgemeiner von Mengen) zu messen, wobei man eigentlich genauer von „Dicke“ statt von „Größe“ sprechen sollte. Die wichtigste dieser Möglichkeiten ist die Hausdorffdimension. Eine ausführliche Darstellung dazu findet man in [2], wo auch einige andere der Möglichkeiten diskutiert werden. Daneben gibt es selbstverständlich zahlreiche weitere Literatur zur Hausdorffdimension. Wir beschränken uns hier auf die Definition der Hausdorffdimension und eine nicht ganz exakte Anwendung auf einfache Beispiele, um eine Vorstellung davon zu bekommen, was mit der Hausdorffdimension gemessen wird.

Die Hausdorffdimension kann für Teilmengen eines metrischen Raumes (X, d) bestimmt werden. Zur vereinfachten Vorstellung würde es genügen $X = \mathbb{R}^n$ und $d(x, y) := |x - y|$ zu betrachten, wobei $|v|$ der übliche, euklidische Betrag auf \mathbb{R}^n ist. Für eine Teilmenge $A \subseteq X$ definiert man den *Durchmesser* von A durch

$$(8) \quad |A| := \sup \{d(x, y) : x, y \in A\} ,$$

wobei auch der Wert $+\infty$ zugelassen ist ($|A| = \sup \{|x - y| : x, y \in A\}$ im Spezialfall des \mathbb{R}^n). Statt $|A|$ findet man auch häufig $\text{diam}(A)$ in der Literatur.

Sei jetzt $A \subseteq X$. Weiters sei $t \geq 0$ und $\varepsilon > 0$. Wir sagen eine Familie $(B_j)_{j \in J}$ ist eine ε -*Überdeckung* von A , falls J endlich oder abzählbar ist, $|B_j| \leq \varepsilon$ für alle $j \in J$ gilt, und $A \subseteq \bigcup_{j \in J} B_j$ gilt. Mit $\mathcal{U}(A, \varepsilon)$ bezeichnen wir die Kollektion aller ε -Überdeckungen von A . Jetzt definieren wir

$$(9) \quad m_t(A, \varepsilon) := \inf \left\{ \sum_{j \in J} |B_j|^t : (B_j)_{j \in J} \in \mathcal{U}(A, \varepsilon) \right\} ,$$

wobei auch der Wert $+\infty$ zugelassen ist. Offensichtlich gilt $m_t(A, \varepsilon_1) \geq m_t(A, \varepsilon_2)$, falls $0 < \varepsilon_1 < \varepsilon_2$. Daher existiert $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} m_t(A, \varepsilon)$ und stimmt mit $\sup\{m_t(A, \varepsilon) : \varepsilon > 0\}$ überein. Das t -*dimensionale Hausdorffmaß* $m_t(A)$ von A wird durch

$$(10) \quad m_t(A) := \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} m_t(A, \varepsilon)$$

definiert, wobei auch der Wert $+\infty$ zugelassen ist. Man kann beweisen, dass es eine Zahl $t_0 \geq 0$ gibt, wobei $t_0 = +\infty$ zugelassen ist, sodass

$$(11) \quad m_t(A) = +\infty \quad \text{für alle } t < t_0, \text{ und } m_t(A) = 0 \quad \text{für alle } t > t_0$$

gilt. Dabei ist $t_0 = +\infty$, falls $m_t(A) = +\infty$ für alle $t \geq 0$, und $t_0 = 0$, falls $m_t(A) = 0$ für alle $t > 0$. Der Wert $m_{t_0}(A)$ kann 0 oder $+\infty$ oder eine positive reelle Zahl sein. Jetzt wird die *Hausdorffdimension* $\text{HD}(A)$ durch

$$(12) \quad \text{HD}(A) := t_0$$

definiert, wobei t_0 diejenige Zahl ist, die (11) erfüllt. Anstatt $\text{HD}(A)$ findet man auch oft $\dim_{\text{H}}(A)$ oder $\dim_{\text{H}} A$ in der Literatur. Um die Hausdorffdimension zu bestimmen, genügt es wegen (10) und (12) die Größe $m_t(A, \varepsilon)$ für $\varepsilon < 1$ abzuschätzen. Deshalb nehmen wir in den folgenden Rechnungen stets $\varepsilon \in (0, 1)$ an.

Nehmen wir zuerst einmal an, A ist ein Intervall. Dann benötigen wir $\frac{C}{\varepsilon}$ Intervalle der Länge ε (im Fall von Intervallen ist der Durchmesser gleich der Länge) um A zu überdecken, wobei $C := |A| + 1$. Daher ist nach (9) $m_t(A, \varepsilon) = \frac{C}{\varepsilon} \varepsilon^t = C \varepsilon^{t-1}$ für $t < 1$ und $m_t(A, \varepsilon) = 0$ für $t > 1$. Wegen (10) ist $m_t(A) = +\infty$ für $t < 1$ und $m_t(A) = 0$ für $t > 1$. Nach (11) und (12) ist daher $\text{HD}(A) = 1$.

Als nächstes sei A ein Quadrat. In diesem Fall benötigen wir $\frac{C}{\varepsilon^2}$ Mengen mit Durchmesser ε um A zu überdecken, wobei C eine passende Konstante ist. Wegen (9) ist $m_t(A, \varepsilon) = \frac{C}{\varepsilon^2} \varepsilon^t = C \varepsilon^{t-2}$ für $t < 2$ und $m_t(A, \varepsilon) = 0$ für $t > 2$. Deshalb ist nach (10) $m_t(A) = +\infty$ für $t < 2$ und $m_t(A) = 0$ für $t > 2$, und aus (11) und (12) ergibt sich somit $\text{HD}(A) = 2$.

Betrachte jetzt einen Würfel A . Wir benötigen $\frac{C}{\varepsilon^3}$ Mengen mit Durchmesser ε um A zu überdecken, wobei C eine passende Konstante ist. Deshalb ergibt (9), dass $m_t(A, \varepsilon) = \frac{C}{\varepsilon^3} \varepsilon^t = C \varepsilon^{t-3}$ für $t < 3$ und $m_t(A, \varepsilon) = 0$ für $t > 3$, woraus wegen (10) $m_t(A) = +\infty$ für $t < 3$ und $m_t(A) = 0$ für $t > 3$ folgt. Nach (11) und (12) ist daher $\text{HD}(A) = 3$.

In diesen einfachen Fällen haben wir erhalten, dass die Hausdorffdimension eines Intervalls gleich 1, diejenige eines Quadrats gleich 2, und diejenige eines Würfels gleich 3 ist. Die Hausdorffdimension entspricht hier also genau unserem intuitiven Dimensionsbegriff. Jetzt wollen wir uns die Hausdorffdimension für ein Fraktal ansehen. Dazu nehmen wir das einfachste Fraktal, nämlich die übliche Cantormenge (siehe Seite 11).

Sei jetzt J die übliche Cantormenge, die für die in (7) definierte Abbildung konstruiert wurde. Wenn wir $\varepsilon := \frac{1}{3^n}$ setzen, dann wird J durch 2^n Intervalle mit Durchmesser ε überdeckt. Die Summe der Durchmesser dieser Intervalle hoch t ergibt dann $2^n \left(\frac{1}{3^n}\right)^t = \left(\frac{2}{3^t}\right)^n$. Lässt man n gegen $+\infty$ gehen, dann folgt aus (9) und (10), dass $m_t(J) = +\infty$, falls $\frac{2}{3^t} > 1$, und $m_t(J) = 0$, falls $\frac{2}{3^t} < 1$. Weil $\frac{2}{3^t} = 1$ genau dann gilt, wenn $t = \frac{\log 2}{\log 3}$, erhalten wir $m_t(J) = +\infty$ für $t < \frac{\log 2}{\log 3}$ und $m_t(J) = 0$ für $t > \frac{\log 2}{\log 3}$. Aus (11) und (12) ergibt sich somit, dass $\text{HD}(J) = \frac{\log 2}{\log 3} \approx 0.6309297536$.

Bei der üblichen Cantormenge haben wir gesehen, dass die Hausdorffdimension nicht ganzzahlig ist. Die Hausdorffdimension muss also nicht eine ganze Zahl sein. Deshalb wird sie auch eine *fraktale Dimension* genannt. Das Wort „fraktal“ kommt aus dem Lateinischen (das lateinische „fractus“ bedeutet auf Deutsch „gebrochen“, von lateinisch „frangere“, deutsch „brechen“). Man beachte aber, dass das Wort „fraktal“ nicht rational bedeutet (es könnte ja als „Bruch“ missverstanden werden),

sondern nur, dass der Wert nicht ganzzahlig sein muss. Wir haben ja bei der üblichen Cantormenge eine irrationale Hausdorffdimension erhalten.

Bisher haben wir Fraktal nur recht salopp über die Selbstähnlichkeit erklärt. Das ist zwar eine gute Vorstellung, aber wenn man damit eine exakte Definition versucht, treten bald Probleme auf. Eine exakte Definition erweist sich als gar nicht so einfach, und es wurde ja auch schon erwähnt, dass man in der Literatur verschiedene nicht zu einander äquivalente Definitionen findet. Jede dieser Definitionen hat ihre Vor- und Nachteile.

Als eine der möglichen Definitionen findet man, eine Menge A ein Fraktal zu nennen, falls die Hausdorffdimension von A nicht ganzzahlig ist. Ein Vorteil dieser Definition ist, dass ein Fraktal nicht über eine formale „Selbstähnlichkeitsbedingung“ definiert ist (solche Bedingungen sind oft zu starke Einschränkungen). Es ist auch in vielen Fällen so, dass anschaulich „selbstähnliche“ Mengen nicht ganzzahlige Hausdorffdimension haben, und Mengen mit nicht ganzzahliger Hausdorffdimension anschaulich „selbstähnlich“ sind. Andererseits gibt es auch Cantormengen mit Hausdorffdimension 1. So eine Cantormenge erhält man zum Beispiel, wenn man bei der Konstruktion auf Seite 11 ähnlich wie bei der üblichen Cantormenge vorgeht, aber aus jedem der 2^n Intervalle, deren Vereinigung J_n ist, genau in der Mitte ein Intervall der Länge $\frac{1}{5^{n+1}}$ (statt $\frac{1}{3^{n+1}}$) herauschneidet (statt $\frac{1}{5^{n+1}}$ kann man auch andere Werte wählen, es muss nur der relative Anteil der herausgeschnittenen Teile gegen 0 gehen, was bei der konkreten Wahl wegen $\frac{3^n}{5^{n+1}} = \frac{1}{5} \left(\frac{3}{5}\right)^n \rightarrow 0$ der Fall ist). Diese Menge ist „selbstähnlich“, hat aber ganzzahlige Hausdorffdimension. Um noch einen weiteren Nachteil dieser Definition zu sehen, betrachte $A_1 := J \cup [2, 3]$ und $A_2 := J \cup ([2, 3] \cap \mathbb{Q})$, wobei J die übliche Cantormenge ist. Beide Mengen bestehen aus dem „selbstähnlichen Teil“ J und einem (zumindest in gewissem Sinn) „nicht selbstähnlichen Rest“. Es sollten daher entweder beide Mengen oder keine der beiden Mengen ein Fraktal sein. Für die Hausdorffdimension erhält man aber $\text{HD}(A_1) = 1$ und $\text{HD}(A_2) = \frac{\log 2}{\log 3}$, also A_1 hat ganzzahlige Hausdorffdimension, während die Hausdorffdimension von A_2 nicht ganzzahlig ist.

Sowohl beim Newtonverfahren für $z^3 - 1$ als auch bei der in (7) definierten Abbildung gibt es beliebig nahe zu jedem $x \in J$ Punkte y , für die $(T^n(y))_{n \in \mathbb{N}_0}$ konvergiert. Das chaotische Verhalten besteht also nur auf einer „kleinen Menge“, während die „meisten Punkte“ ein „schönes Verhalten“ zeigen. Man könnte also sagen, dass für diese Beispiele chaotisches Verhalten und Fraktale nur am Rande interessant sind. Es gibt aber auch Beispiele, bei denen es ein Fraktal A gibt, sodass $\omega(x) \subseteq A$ für alle $x \in X$ und die Einschränkung der Abbildung auf A chaotisches Verhalten zeigt. So ein Beispiel möchten wir jetzt vorstellen.

Betrachte das Einheitsquadrat X , also

$$X := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1 \text{ und } 0 \leq y \leq 1\}.$$

Die Abbildung $T : X \rightarrow X$ sei durch

$$(13) \quad T(x, y) := \left(\frac{13}{18} - \frac{13}{9} \left| x - \frac{1}{2} \right|, \frac{4}{11}x + \frac{1}{4} + \frac{1}{3} \left(y - \frac{1}{2} \right) \right)$$

definiert. Für jedes $x \in X$ und jedes $n \in \mathbb{N}_0$ muss offensichtlich $\omega(x) \subseteq T^n(X)$ gelten. Wenn wir

$$(14) \quad A := \bigcap_{n=0}^{\infty} T^n(X)$$

definieren, dann gilt daher $\omega(x) \subseteq A$ für alle $x \in X$. Nach „langer Zeit“ ist der Orbit also in der Nähe von A . Das Rechteck mit den Eckpunkten $(0, 0)$, $(\frac{1}{2}, 0)$, $(\frac{1}{2}, 1)$ und $(0, 1)$ wird durch T auf das Parallelogramm mit den Eckpunkten $(0, \frac{1}{12})$, $(\frac{13}{18}, \frac{35}{132})$, $(\frac{13}{18}, \frac{79}{132})$ und $(0, \frac{5}{12})$ abgebildet, und das Rechteck mit den Eckpunkten $(\frac{1}{2}, 0)$, $(1, 0)$, $(1, 1)$ und $(\frac{1}{2}, 1)$ auf das Parallelogramm mit den Eckpunkten $(\frac{13}{18}, \frac{35}{132})$, $(0, \frac{59}{132})$, $(0, \frac{103}{132})$ und $(\frac{13}{18}, \frac{79}{132})$. Deshalb ist $T(X)$ die Vereinigung dieser beiden Parallelogramme. Der graue Bereich im linken Bild von Abbildung 6 zeigt $T(X)$, und der graue Bereich im rechten Bild von Abbildung 6 zeigt $T^3(X)$. Die Menge A ist in Abbildung 7 dargestellt.

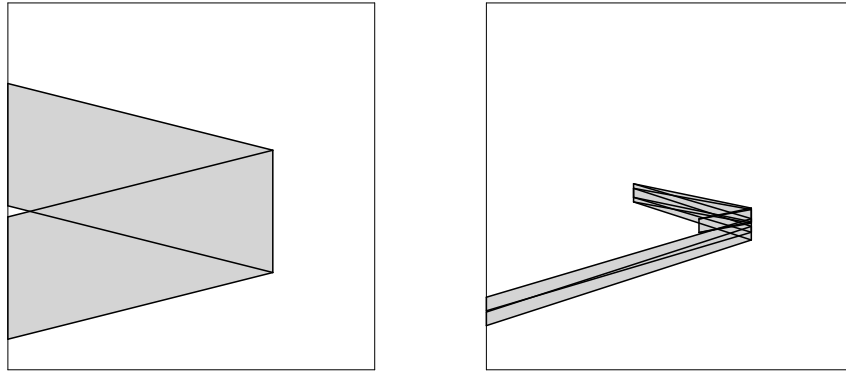


Abbildung 6: Das linke Bild zeigt $T(X)$ und das rechte Bild zeigt $T^3(X)$, wobei T die in (13) definierte Abbildung ist.

Auch diese Menge A ist ein Fraktal. Grob gesprochen besteht diese Menge aus Linien in einem gewissen Winkel zur x -Achse, die verschieden lang sind. Legt man eine Parallele zur y -Achse und schneidet diese mit A , dann erhält man im Wesentlichen eine Cantormenge (siehe Seite 11, diesmal aber nicht die übliche Cantormenge!), wenn der Schnittpunkt mit der x -Achse zwischen $\frac{65}{162}$ und $\frac{13}{18}$ liegt.

Diese Abbildung zeigt auch chaotisches Verhalten. Es gibt hier eine Menge $A_1 \subseteq A$ mit $\text{HD}(A_1) = \text{HD}(A)$, sodass die Einschränkung von T auf A_1 Chaos nach Devaney (siehe Seite 6) zeigt. Die Hausdorffdimension von A zu bestimmen ist nicht ganz einfach. Aus Satz 1 in [3] folgt, dass

$$\text{HD}(A) = 1 + \frac{\log \frac{13}{9}}{-\log \frac{1}{3}} = \frac{\log 13}{\log 3} - 1 \approx 1.334717519$$

gilt. In diesem Beispiel ist also die Menge, in deren Nähe man sich nach „langer Zeit“ befindet ein Fraktal mit nicht ganzzahliger Hausdorffdimension.

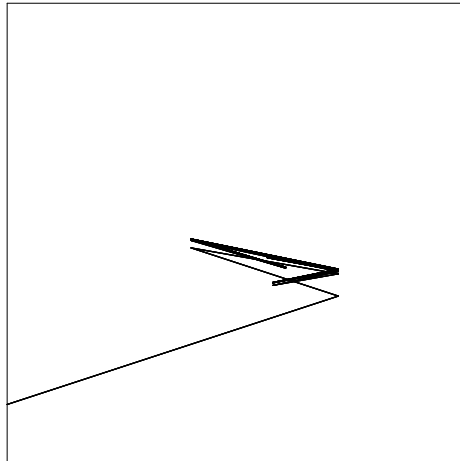


Abbildung 7: Die in (14) definierte Menge A für die Abbildung aus (13).

Literatur

- [1] R. DEVANEY, *An introduction to chaotic dynamical systems* (reprint of the 2nd edition), Westview Press, Boulder, 2003.
- [2] K. FALCONER, *Fractal geometry: mathematical foundations and applications* (2nd edition), Wiley, Hoboken, 2003.
- [3] F. HOFBAUER, P. RAITH, K. SIMON, *Hausdorff dimension for some hyperbolic attractors with overlaps and without finite Markov partition*, *Ergodic Theory Dynam. Systems* **27** (2007), 1143–1165.
- [4] T. Y. LI, J. YORKE, *Period three implies chaos*, *Amer. Math. Monthly* **82** (1975), 985–992.
- [5] H.-O. PEITGEN, P. RICHTER, *The beauty of fractals*, Springer-Verlag, Berlin, 1986.
- [6] B. SCHWEIZER, J. SMÍTAL, *Measures of chaos and a spectral decomposition of dynamical systems on the interval*, *Trans. Amer. Math. Soc.* **344** (1994), 737–754.
- [7] J. STOER, *Numerische Mathematik 1* (9. Auflage), Springer-Verlag, Berlin, 2005.
- [8] P. WALTERS, *An introduction to ergodic theory*, Springer-Verlag, New York, 1982.

PETER RAITH

Fakultät für Mathematik, Universität Wien, Nordbergstraße 15, 1090 Wien, Austria
e-mail address: peter.raith@univie.ac.at